

AB03: Hesse'sche Normalenform

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Aufgabe 1:

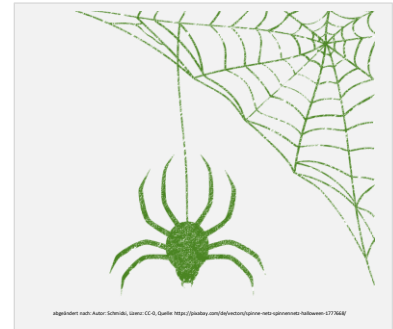
Schau Dir das Video „THG Mathemann und die Hesse'sche Normalenform“ auf YouTube bis 0:34min an.

Link: <https://bit.ly/30Q0VtR>

Pausiere an dieser Stelle.

Aufgabe 2:

Lies Dir den Infokasten zur Hesse'schen Normalenform durch und überlege Dir, welche Schritte oder Begriffe Dir unklar sind.



I Die Hesse'sche Normalenform

Um die *Hesse'sche Normalenform* $E: (\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n}_0 = 0$ einer Ebene zu erhalten, muss in der Normalenform ein Einheitsvektor \vec{n}_0 verwendet werden.

Gegeben: Eine Ebene und ein Punkt R

Gesucht: Abstand d von R zu E

Fall 1: Ebene E in der Hesse'schen Normalenform $E: (\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n}_0 = 0$ gegeben.

Dann lässt sich der Punkt R in die Hesse'sche Normalenform einsetzen und es gilt:

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) * \vec{n}_0|.$$

Fall 2: Ebene E in der Koordinatengleichung $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - b = 0$

gegeben. Dann gilt $d = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} * (n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 - b) \right| = \left| \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$.

Aufgabe 3:

Wiederhole, wie man den Normalenvektor einer Ebene bestimmt und wie man einen Vektor zu einem Einheitsvektor umwandelt.

Aufgabe 4:

Hilf dem Mathemann mit der *Hesse'schen Normalenform* den Abstand vom Punkt $P(9|27|36)$ zur Ebene $E: 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 35$ zu bestimmen.

Aufgabe 5:

Schau Dir das Lösungsvideo (**Link:** <https://www.youtube.com/watch?v=xr6alrp1rkE>) und das restliche Mathemann-Video an.

π MATHEMATISCH KORREKTES MATHEMATIK-WORKOUT NR. 3 π

Aufgabe 6:

Die neue Mathe-Frau hat ein mathematisches Problem:

„Gegeben sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(-1/7/9)$.

Bestimme mit der Hesse'schen Normalenform den Abstand von E zu P.“

Löse die Aufgabe, um der neuen Mathefrau zu helfen.

Aufgabe 7: *Lotfußpunktverfahren vs Hesse'sche Normalenform*

- (a) Schau Dir das Video „*Hessesche Normalenform oder Lotfußpunktverfahren, Abstand Punkt Ebene*“ auf YouTube an und notiere Dir, wann welches Verfahren sinnvoll ist.

(**Link:** https://www.youtube.com/watch?v=_87_TOk3xEE)

- (b) Falls Dir andere Vor- und Nachteile einfallen, ergänze diese in Deiner Gegenüberstellung.

Bei den folgenden Aufgaben liegt die Wahl bei Dir, ob Du die *Hesse'sche Normalenform* oder das *Lotfußpunktverfahren* benutzen möchtest.

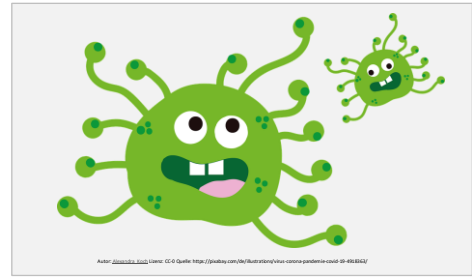
Aufgabe 8:

Gegeben sind die Ebenen $E_1: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$ und $E_2: x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 = -1$. Bestimme den Abstand zwischen E_1 und E_2 .

Hinweis: Überlege Dir, welche Lagebeziehung zwischen den beiden Ebenen besteht.

Aufgabe 9:

Wir schreiben das Jahr 2035. Autos gehören der Vergangenheit an. Stattdessen fliegt man mit einem Jetpack. Die Coronavirus-Abstandsregelung gilt nun schon seit 15 Jahren.



Waldi möchte seine Freundin Kunigunde besuchen. Mitten auf dem Weg schneiden ihm unendlich viele Scherzkekse den Weg ab, indem sie gemeinsam eine Ebene aus Menschen vor ihm aufspannen. Diese Ebene kann nicht durchflogen werden, ohne den Sicherheitsabstand von 1,5m zu verletzen.

Waldi liest auf seinem Bordcomputer ab, dass er sich auf dem Punkt $P(10|12|53)$ befindet.

Die Ebene der Scherzkekse lässt sich durch die Gleichung $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ beschreiben. Hat Waldi den Sicherheitsabstand von 1,5m eingehalten?

Aufgabe 10: Für Profis

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$

und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme den Abstand zwischen E und g .