AB03: Hesse'sche Normalenform – Lösungen

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Aufgabe 6:

1. HNF aufstellen

Sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene E

$\Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d.h. $\vec{n}$ ist orthogonal zu den Spannvektoren der Ebene.

Das führt zu folgendem LGS:

$\text{I.}\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0$

$\text{II.}\ 3n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0 \quad | -3\text{I}$

$\text{I.}\ n_1 + 2n_2 + n_3 = 0$

$\text{II.}\ \quad -2n_2 - n_3 = 0$

daher: $n_3 = -2n_2$ und $n_1 = 0$

Setzt man $n_3 = 2$, erhält man $n_2 = -1$ und somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

Der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt auf der Ebene.

$\Rightarrow$ HNF $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Einsetzen in die Formel

$d = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$

$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-9+14}{\sqrt{5}} \right| = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{5}}}}$

Aufgabe 7:

Die Hesse'sche Normalenform ist schneller, wenn lediglich der Abstand ausgerechnet werden soll.

Werden zusätzliche Informationen wie der Lotfußpunkt benötigt, ist das Lotfußpunktverfahren anzuwenden.

Aufgabe 8:

Die Ebenen $E_1 : 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = \ 5$ und $E_2 : x_1 + 1{,}5\,x_2 + 2\,x_3 = \ -1$ sind parallel, da ihre Normalenvektoren Vielfache voneinander sind.

Daher ist der Abstand der Ebenen gleich dem Abstand von Ebene 1 zu einem beliebigem Punkt auf Ebene 2.

Aufgabe 9:

Alle Angaben in Metern

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$\rightarrow$ HNF $\quad E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Einsetzen in die Formel:

$$d = \left|\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 53 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 51 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\frac{22+14}{\sqrt{5}}\right| = \frac{36}{\sqrt{5}} \approx 16{,}1 > 15$$

A: Waldi hält sich nicht an den Sicherheitsabstand von 15m.

Aufgabe 10: *Für Profis*

Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene E, denn:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2-6+8=0$$

Normalen-vektor der Ebene

Richtungsvektor der Gerade

-> Der Abstand zwischen g und E ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punkts der Gerade zur Ebene E.

Wähle $P(-1|-2|2)$.

-> $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $b = 5$

$$d = \left| \frac{-2-6+8-5}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{29}} \right| = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{29}}}}$$